

1- мустақил иш

1. Келтирилган $y(x, C)$ функциялар (C — ихтиёрий ўзгармас) мос равишда берилган дифференциал тенгламаларнинг ечими бўлади-ми:

а) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$; $xyy' - y^2 = x^2y'$;

б) $y = Cx + \frac{1}{C}$; $xy' - y + \frac{1}{y} = 0$?

Жавоб: а) ҳа; б) йўқ.

2. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

а) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})dy = 0$;

б) $xy \cdot y' = y^2 + 2x^2$; в) $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

Ж: а) $x + y - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\ln|(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} - 1)| = C$;

б) $y^2 = 4x^2 \ln Cx$; в) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

3. Коши масаласини ечинг:

а) $\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin y}} + y' = 0$; $y|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$;

б) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$; $y|_{x=1} = 0$;

в) $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$.

Ж: а) $\sqrt{2} \sin x + \sin y - \cos y = 0$;

б) $y = -x \ln|1 - \ln x|$; в) $(x + y - 1)^2 = C(x - y + 3)$.

2- §. Чизиқли, Бернулли, тўлиқ дифференциалли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

8.2.1. Ушбу

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

кўринишдаги тенглама *чизиқли дифференциал тенглама* дейилади. Бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар x нинг маълум узлуксиз функциялари. Агар $Q(x) \not\equiv 0$ бўлса, тенглама *чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама*, агар $Q(x) \equiv 0$ бўлса, *чизиқли бир жинсли тенглама* дейилади.

$y = u(x)v(x)$ ўрнига қўйиш (бу ерда u ва v номаълум функциялар) ёрдамида тенглама

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

ёки

$$u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x)$$

кўринишга келтирилади.

u ва v функциялардан бири (масалан, v) ихтиёрий танлаб олиниши мумкинлигидан фойдаланиб, v функцияни охириги тенгла-

мада кавс ичида турган $(v' + Pv)$ ифода нолга тенг бўладиган қилиб олинади. У ҳолда иккинчи номаълум функция u ни топиш учун $u'v = Q(x)$ тенгламани ечиш қифоя.

Шундай қилиб, берилган тенглама $y = uv$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган ушбу иккита тенгламага келтирилади:

$$\begin{aligned}v' + P(x)v &= 0, \\ u'v &= Q(x).\end{aligned}$$

Буларни интеграллаб берилган тенгламанинг умумий ечими топилади:

$$y = e^{-\int p dx} (C + \int Q e^{\int p dx} dx).$$

Баъзан дифференциал тенглама y нинг функцияси x га нисбатан чизикли бўлган, яъни

$$x' + p(y)x = q(y)$$

кўринишга келтирилиши мумкин. Бу тенглама $x = uv$ ўрнига қўйиш орқали юқоридагидек ечилади.

1- м и с о л. Ушбу

$$(x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1)$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и ш. Тенгламани $(x^2 - x) \neq 0$ га бўлиб, ушбу кўринишга келтирамыз:

$$y' + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x - 1)}{x^2 - x}$$

ёки

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Тенглама чизикли бўлиб, бу ерда $P(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, $Q(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1}$.

$y = uv$, $y' = u'v + uv'$ ўрнига қўйиш натижасида берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x(x-1)}\right) = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

u нинг олдидаги кўпайтувчини нолга тенглаб

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x(x-1)} = 0, \\ u'v = \frac{x(2x-1)}{x-1} \end{cases}$$

тенгламаларни ҳосил қиламыз. Дастлаб биринчи тенгламанинг исталган хусусий ечимини топамиз:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x(x-1)} \quad \text{ёки} \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} dx.$$

Бундан

$$\ln|v| = -\ln|x-1| + \ln x$$

ёки

$$v = \frac{x}{x-1}.$$

Топилган v функцияни системанинг иккинчи тенгламасига қўямиз:

$$u' \frac{x}{x-1} = \frac{x(2x-1)}{x-1},$$

бу ердан $u' = 2x - 1$. Интегралласак:

$$u = x^2 - x + C.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = uv = \frac{x(x^2 - x + C)}{x-1}.$$

2- м и с о л. $(2x - y^2)y' = 2y$ тенгламанинг $y|_{x=1} = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Е ч и ш. Берилган тенглама x га нисбатан чизиклидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$(2x - y^2) \frac{1}{x'} = 2y, \text{ ёки } 2x - y^2 = 2x'y, \text{ ёки } x' - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2} \text{ (бу ерда}$$

$$p(y) = -\frac{1}{y}, \quad q(y) = -\frac{y}{2}).$$

$x = uv$, $x' = u'v + uv'$ ўрнига қўйиш натижасида берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = -\frac{y}{2},$$

бу ердан ушбу иккита тенгламага эга бўламиз:

$$v' - \frac{v}{y} = 0 \text{ ва } u'v = -\frac{y}{2}.$$

Биринчи тенгламани ечиб, топамиз:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \text{ ёки } v = y.$$

Иккинчи тенгламага $v = y$ ни қўямиз:

$$u'y = -\frac{y}{2}, \text{ ёки } u' = -\frac{1}{2}, \text{ ёки } u = C - \frac{y}{2}.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$x = uv = y\left(C - \frac{y}{2}\right).$$